

Das Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine Erweiterung des Additionsverfahrens. Ziel ist es, ein LGS durch Umformungen in Stufenform zu bringen, um es dann lösen zu können. Zulässige Umformungen sind dabei:

- A Vertauschen zweier Zeilen
- B Multiplikation aller Einträge einer Zeile mit einem Faktor
- C Addition einer Zeile zu einer anderen

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \\ 8 & -9 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

1. Ziel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

2. Ziel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcll} \text{III} & 3x_3 & = & 9 \quad |:3 \\ & x_3 & = & 3 \\ \text{II} & 2x_2 - 1 \cdot 3 & = & 1 \\ & 2x_2 - 3 & = & 1 \quad |+3 \quad |:2 \\ & x_2 & = & 2 \\ \text{I} & 4x_1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & = & 1 \\ & 4x_1 - 3 & = & 1 \quad |+3 \quad |:4 \\ & x_1 & = & 1 \end{array}$$

Das Gauß-Verfahren und dieses Beispiel werden im verlinkten Video erklärt:
<https://vimeo.com/358259384>



Übung

① Berechnen Sie!

a)
$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & \vdots & 21 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & \vdots & -23 \\ 0 & -5 & -3 & \vdots & -22 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 20 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & -31 \\ 0 & -2 & 3 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$



② Berechnen Sie!

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 4 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 13 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$



③ Berechnen Sie!

a)
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & \vdots & -1 \\ 1 & -3 & 2 & \vdots & 11 \\ 0 & -2 & 3 & \vdots & 15 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & \vdots & 23 \\ -1 & -4 & -3 & \vdots & 21 \\ 1 & -5 & 4 & \vdots & 24 \end{pmatrix}$$



L =

L =

b)
$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & \vdots & -12 \\ 5 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -5 & 3 & -4 & \vdots & 34 \end{pmatrix}$$

e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & \vdots & -17 \\ -4 & -5 & 1 & \vdots & 20 \\ -2 & 0 & 3 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$



L =

L =

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & -10 \\ 5 & -4 & -2 & \vdots & 12 \\ 4 & 5 & -3 & \vdots & -26 \end{pmatrix}$$

f)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \vdots & 5 \\ -1 & 0 & -3 & \vdots & 3 \\ -4 & -4 & -2 & \vdots & -12 \end{pmatrix}$$



L =

L =

④ Welche Schwierigkeit tritt jeweils bei den dargestellten Systemen auf? Finden Sie eine Lösung!

a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0,5 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$