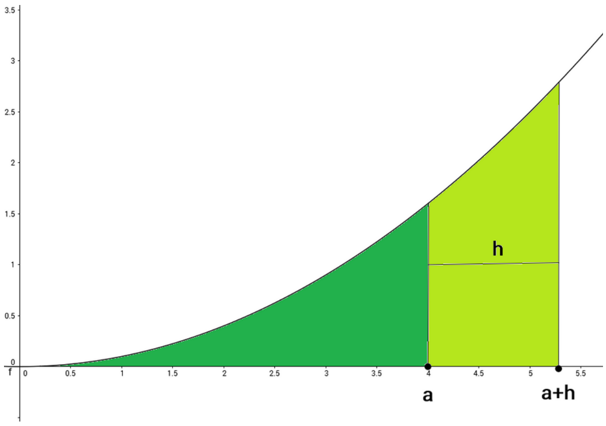
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist einer der wichtigsten Sätze in der Analysis. Er ist auch die Grundlage dafür, dass wir Integrale exakt und ohne die Bildung von Unter- und Obersummen berechnen können. Seine Hauptaussage ist, dass jede Integralfunktion eine Stammfunktion ist, also das folgendes gilt:

$$f(x) = I'(x)$$

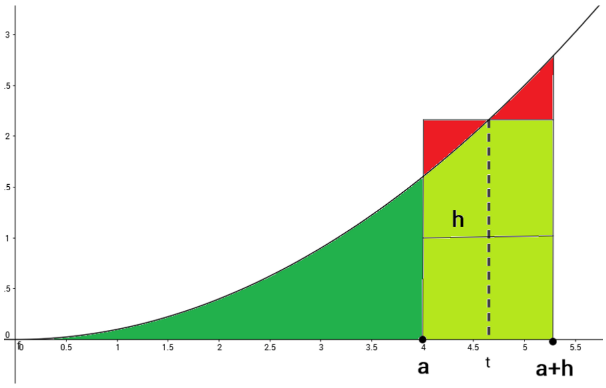
Jetzt wollen wir uns überlegen, warum diese Aussage stimmt und wie wir mit Hilfe dieses Hauptsatzes ganz einfach Integrale berechnen können.



① Wir bezeichnen I(x) als Integralfunktion. Diese Funktion gibt den Flächeninhalt zwischen der Funktion f und der x-Achse an. Gemessen wird dabei immer der Flächeninhalt zwischen der Stelle null und einer anderen beliebigen Stelle, die größer ist als null.
Die dunkle Fläche können wir also als I(a) bezeichnen

Die helle Fläche kann durch

I(____) - I(a) = I(a+ ____) - I(a) bezeichnet werden

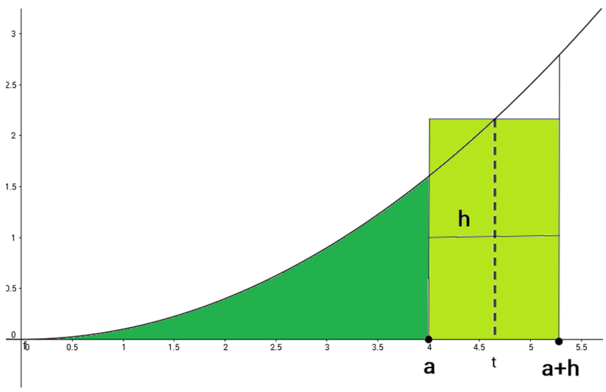


② Die helle Fläche kann mit Hilfe der

____________________ berechnet werden.

Wichtig ist dabei, dass die beiden rot markierten Flächen

____________________ .



③ Die Stelle an der die obere Kante des Rechteckts den Graphen schneidet nennen wir t. Es gilt also für die helle Fläche:

I(a+ ____) - I(a) = f(t) ____ .

④ Nun stellen wir nach f(t) um:

$$f(t) = \frac{I(a+h)-I(a)}{h}$$

⑤ Nun schauen wir, was passiert, wenn wir h immer kleiner werden lassen:

$$\lim_{h\to 0} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{I(a+h)-I(a)}{h}$$

Den Ausdruck auf der rechten des Gleichheitszeichen kennen wir schon. Das ist der

________ von I an der Stelle a. Für diesen können wir

auch ____ schreiben.

⑥ Wenn h gegen null läuft, dann gilt:

f(t) läuft gegen ____.

⑦ Die Erkenntnisse aus 5 und 6 setzen wir nun in die Formel aus 5 ein.
Aus

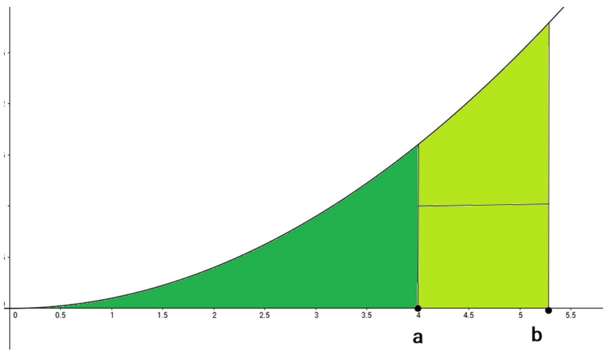
$$\lim_{h\to 0} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{I(a+h)-I(a)}{h}$$

Wird dann:

________.

Dies ist genau die Aussage, die wir zeigen wollten.

Wir haben jetzt also gezeigt, dass die Ableitung unserer Integralfunktion I, die Funktion des Graphen ist, unter dem wir den Flächeninhalt gemessen haben.
Das bedeutet im Umkehrschluss, dass wir nun Integrale berechnen können, in dem wir die Ausgangsfunktion einfach „aufleiten".
Wir haben auch schon gemerkt, dass wenn wir das Integral in bestimmten Grenzen berechnen wollen, wir das Integral an der oberen Grenze minus das Integral der unteren Grenze rechnen müssen.



Für die hellgrüne Fläche gilt dann also wenn F(x) eine Stammfunktion von f ist:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$