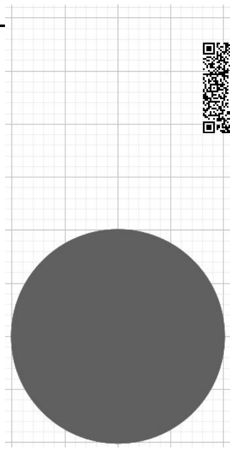
Exponentialfunktionen und ihre Graphen

Einstieg: Der Schneeballturm

An einem schönen Wintertag beschließt eine Gruppe Kinder einen Schneeballturm zu bauen. Dazu wird immer ein Schneeball auf den anderen gesetzt. Aus Gründen der Stabilität hat jeder Ball nur den halben Durchmesser des vorherigen.

Der erste Schneeball hat einen Durchmesser von 20 cm. Angenommen die Kinder bauen (ausdauernd wie Kinder eben sind) den ganzen Tag an diesem Turm.

Können die Kinder am Abend noch über den Turm schauen?



Funktionen mit Termen der Form $a \cdot q^x$

Eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot q^x$ mit $a \neq 0$ und $q > 0$ und $q \neq 1$ heißt Exponentialfunktion.

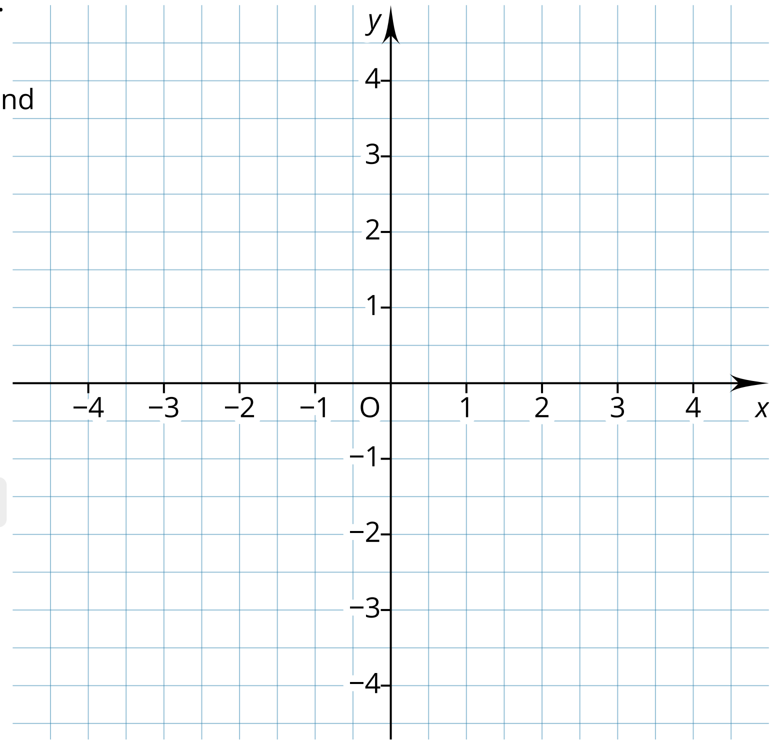
Ergänzen Sie jeweils die Lücken und skizzieren Sie die Graphen.

a) $f(x) = \_\_\_ \cdot \_\_\_^x$
$a = 1{,}5$, $q = 2$

b) $f(x) = \_\_\_ \cdot 3^x$
$a = -2$, $q = \_\_\_$

c) $f(x) = 1{,}5 \cdot 0{,}5^x$
$a = \_\_\_$, $q = \_\_\_$

d) $f(x) = -0{,}5^x$ ___
$a = \_\_\_$, $q = 0{,}5$



Veranschaulichung: Achilles und die Schildkröte
https://youtu.be/7SY-xOhOa6VM

Alle Graphen werden nach einer Seite hin immer flacher. Man sagt sie besitzen eine **(waagrechte) Asymptote**.

Für $q > 1$ nähert sich der Graph seiner Asymptoten auf der ___ Seite. Sonst nähert sich der Graph seiner Asymptoten auf der ___ Seite.

Funktionen mit Termen der Form $a \cdot q^x + d$

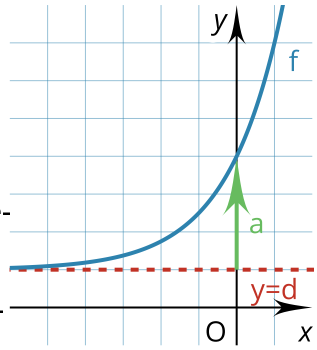
Die gerade untersuchten Graphen können zusätzlich noch in y-Richtung verschoben werden. Im Funktionsterm passiert das, indem ein Summand d am Ende ergänzt wird.

Die Gleichung einer Exponentialfunktion f kann also auch folgende Form haben:

$$f(x) = a \cdot q^x + d \text{ oder } f(x) = a \cdot q^{-x} + d$$

Dabei gibt d die Lage der Asymptote an. Der Faktor a gibt an, wie man vom Punkt $P(0|d)$ zum y-Achsenschnittpunkt des Graphen gelangt. Deshalb ist der Y-Achsenschnittpunkt immer $Y(0|a+d)$.

Die Graphen von $f(x) = a \cdot q^x + d$ und $g(x) = a \cdot q^{-x} + d$ unterscheiden sich nur durch Spiegelung an der y-Achse.



Graphen verschieben, strecken und spiegeln

Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch ...

... Verschiebung in y-Richtung um d genau dann, wenn $g(x) = f(x) + d$ gilt.

... Streckung in y-Richtung mit Faktor $a > 0$ genau dann, wenn $g(x) = a \cdot f(x)$ gilt.

... Spiegelung an der x-Achse genau dann, wenn $g(x) = -f(x)$ gilt.

... Spiegelung an der y-Achse genau dann, wenn $g(x) = f(-x)$ gilt.

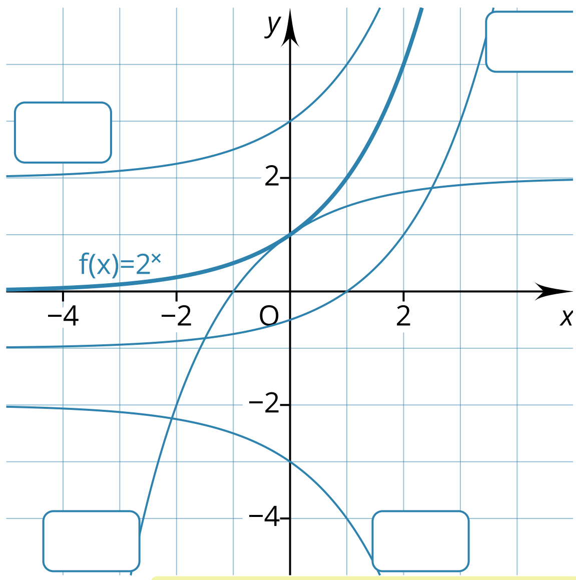
① Geben Sie die Gleichung der Funktion g an, deren Graph aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2^x$ durch folgende Veränderungen entsteht. Ordnen Sie die Graphen zu.

a) Verschiebung in y-Richtung um 2.

b) Streckung mit Faktor 0,5 in y-Richtung und anschließende Verschiebung um eine Einheit nach unten.

c) Spiegelung an der x- und an der y-Achse und anschließende Verschiebung um 2 nach oben.

d) Verschiebung um 2 nach oben und <u>anschließende</u> Spiegelung an der x-Achse.



Ein Video dazu, wie man die Gleichung am Graphen ablesen kann, finden Sie hier: vimeo.com/414308194

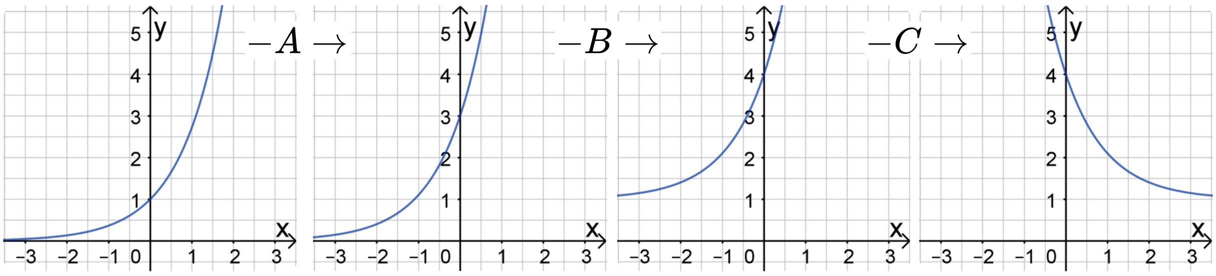
e-Funktionen

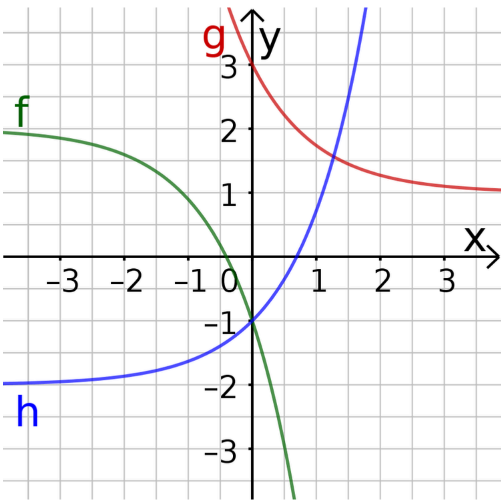
e-Funktion, euler'sche Zahl

Eine besondere Zahl ist die **euler'sche Zahl** e. Es gilt $e \approx 2{,}72$.
Gleichungen der Form $f(x) = 3e^x - 1$ werden in der Differenzialrechnung wichtig werden. e ist also <u>keine Variable</u>, deren Wert bestimmt werden muss. Ob in der Gleichung „e^x“ oder „2^x“ steht, ist für die Bestimmung des Graphen im Prinzip egal.

② Bringen Sie die Veränderungen in die richtige Reihenfolge. Notieren Sie die zu den Graphen gehörigen Funktionsgleichung jeweils darunter.

☐ Verschiebung in y-Richtung ☐ Streckung in y-Richtung ☐ Spiegelung an der y-Achse





③ Die nebenstehenden Graphen gehören zu Funktionen mit Termen der Form $a \cdot e^{\pm x} + d$. Ergänzen Sie die Lücken.

a) f: Asymptote ______, Streckfaktor ______, Annährung an Asymptote nach ______. f(x)= ______

b) g(x)= ______

c) h(x)= ______

④ **Experten-Bonus:** Abgebildet sind die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 2e^x - 1$ und g mit $g(x) = 2e^x - 0{,}5x - 1$.
Der Graph von g besitzt eine sogenannte **schiefe Asymptote**.
Erklären Sie, wie es dazu kommt.