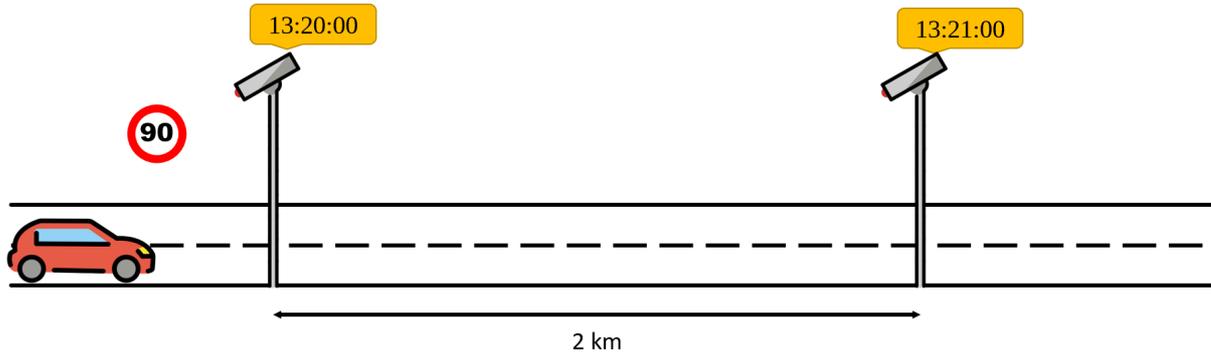


Achtung Kontrolle!

Einstieg



Zur Geschwindigkeitskontrolle werden teilweise so genannte Abschnittskontrollen durchgeführt. Dabei wird an zwei Punkten einer Strecke die Zeit gemessen, zu der ein Fahrzeug diesen Punkt passiert.

- Erklären Sie, wie man mit Hilfe eines solchen Aufbaus Geschwindigkeitsüberschreitungen nachweisen kann.
- Wann kann eine Geschwindigkeitsüberschreitung auf diese Weise nicht gemessen werden?
- Wie könnte die Anlage angepasst werden um Geschwindigkeitsüberschreitungen genauer messen zu können?

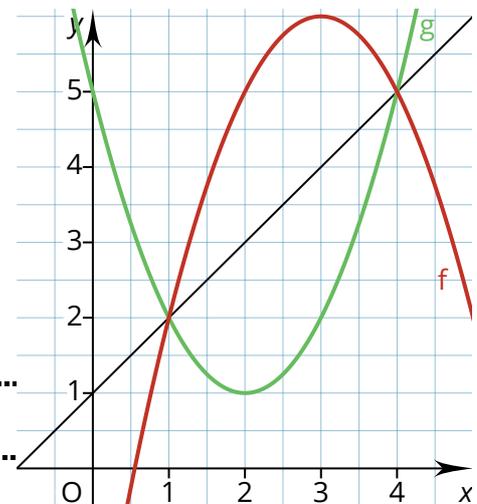
Übertragung

Übertragen Sie die Überlegungen aus dem Einstieg nun auf die Situation an den abgebildeten Graphen.

Problem: Die Änderungsrate auf dem Intervall ist für beide Graphen gleich, nämlich . Sie beschreibt den tatsächlichen Verlauf der Graphen also nur ungenau.

Idee:

.....



Ihre Überlegungen können Sie mit dem folgenden Video überprüfen:
<https://vimeo.com/469664091>

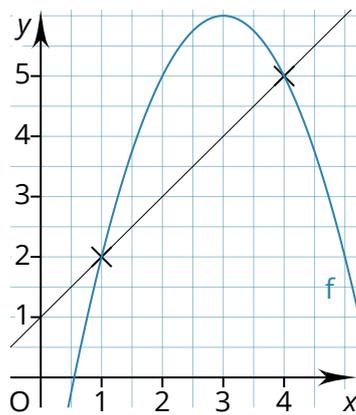


Merke: Ableitung

Häufig will man beschreiben, wie sich eine Funktion f an einer bestimmten Stelle x_0 verändert. Diese **momentane Änderung** heißt **Ableitung** $f'(x_0)$ (sprich „ f Strich von x_0 “).

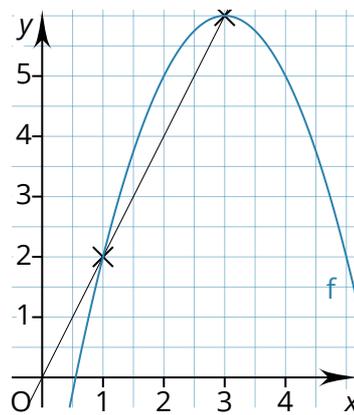
Um sich der Ableitung zu nähern, kann man den Differenzenquotienten auf immer engeren Intervallen bilden.

Bsp.: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 6x - 3$. Gesucht ist die Ableitung der Funktion f an der Stelle 1, kurz $f'(1)$. Wir bilden nun den Differenzenquotienten auf verschiedenen Intervallen $[1; x_1]$, wobei x_1 immer näher an 1 rücken soll.



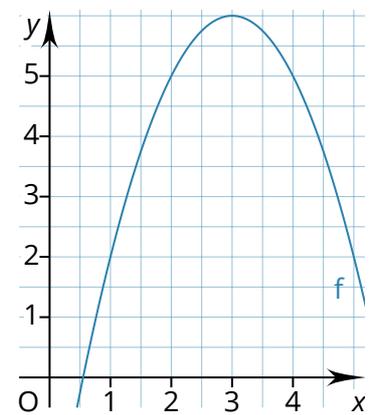
$$x_1 = 4$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{5 - 2}{4 - 1} = 1$$



$$x_1 = 3$$

$$\frac{f(\quad) - f(1)}{\quad - 1} = \frac{\quad - 2}{\quad - 1} = \quad$$



$$x_1 = 2$$

$$\frac{\quad - f(1)}{\quad - 1} = \quad = \quad$$

In einer Tabelle kann man Werte für noch kleinere Intervalle zusammenstellen:

| x_1 | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(1)$ | $x_1 - 1$ | $\frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1}$ |
|-------|----------|-----------------|-----------|---------------------------------|
| 2 | 5 | 5-2=3 | 2-1=1 | 3:1=3 |
| 1,1 | | | | |
| 1,01 | | | | |
| 1,001 | | | | |

Vermutung: Wenn die Tabelle immer weiter fortgeführt werden würde, rückt der berechnete Differenzenquotient immer näher an \quad .

Mathematisch: Für $x_1 \rightarrow 1$ gilt $\frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} \rightarrow \quad$ oder $\lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} = \quad$

- ① Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ für $x_0 = 0$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ② Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ für $x_0 = 1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ③ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ für $x_0 = 2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ④ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ für $x_0 = -1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑤ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3$ für $x_0 = -2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑥ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x_0 = 0$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑦ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x_0 = 1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑧ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x_0 = 2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑨ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x_0 = -1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑩ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ für $x_0 = -2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑪ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$ für $x_0 = 0$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

- ⑫ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$ für $x_0 = 1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑬ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$ für $x_0 = 2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑭ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$ für $x_0 = -1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑮ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 0,5x^2$ für $x_0 = -2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑯ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ für $x_0 = 0$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑰ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ für $x_0 = 1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑱ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ für $x_0 = 2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑲ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ für $x_0 = -1$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$

⑳ Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ für $x_0 = -2$.

| x_1 | $x_1 - x_0$ | $f(x_1)$ | $f(x_1) - f(x_0)$ | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
|-------|-------------|----------|-------------------|-------------------------------------|
| | 0,1 | | | |
| | 0,01 | | | |
| | 0,001 | | | |

$$\Rightarrow f'(x_0) =$$