

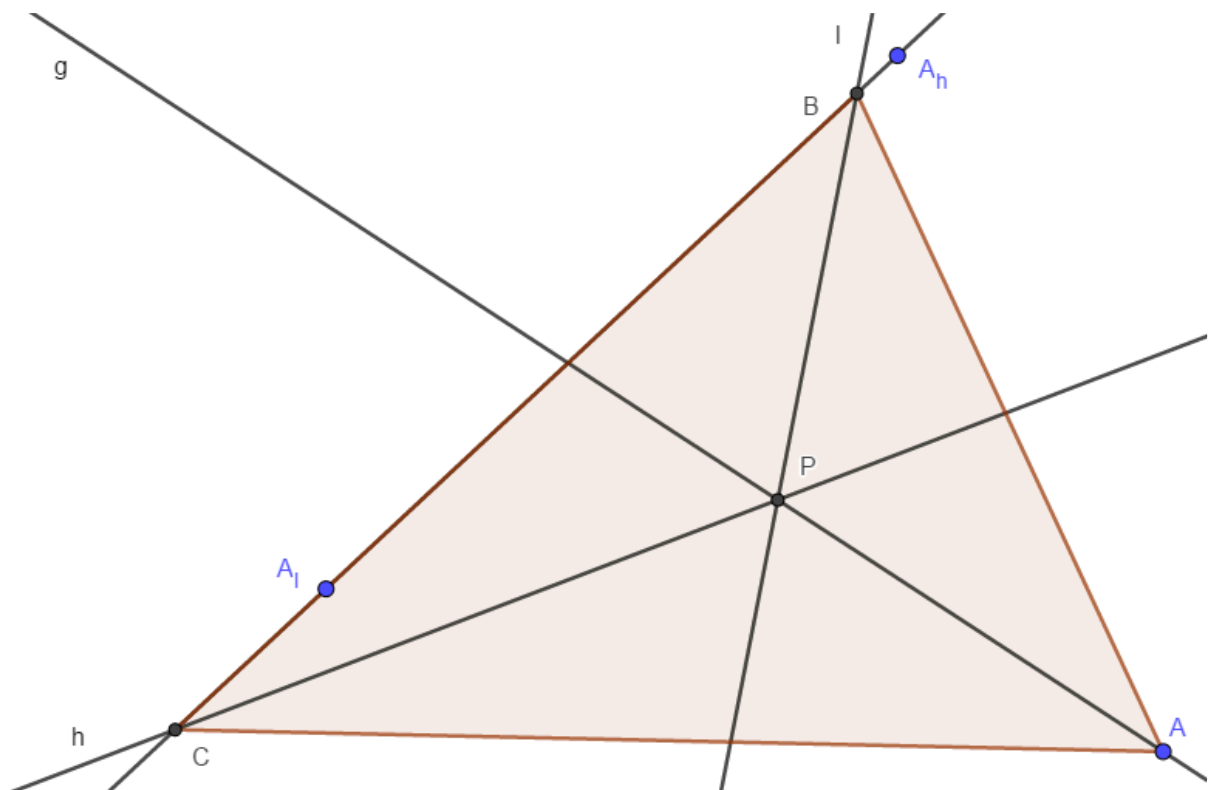
## Konstruktion eines Dreiecks um die Winkelhalbierenden

Gegeben seien drei Geraden  $g, h, l$ , die sich im Punkt  $P$  schneiden.

Gesucht ist ein Dreieck  $\triangle ABC$ , zu welchem die Geraden  $g, h, l$  die Winkelhalbierenden sind.

Dazu schlägt Maximilian die folgende Konstruktion vor:

- Wähle einen Punkt  $A$  auf  $g$ , der von  $P$  verschieden ist.
- Der Spiegelpunkt von  $A$  an  $h$  sei  $A_h$ , der Spiegelpunkt von  $A$  an  $l$  sei  $A_l$ .
- Die Schnittpunkte der Geraden  $g(A_h; A_l)$  mit  $h$  bzw.  $l$  seien  $B$  bzw.  $C$ .
- $\triangle ABC$  ist das gesuchte Dreieck.



Ist diese Konstruktion eigentlich (immer) durchführbar?  
Prüfe dafür jeden Schritt und argumentiere!

Schritt 1: Ja, da die Wahl von  $A$  auf  $g \setminus P$  irrelevant ist, weder Entfernung noch Richtung ändern das Ergebnis.

Schritt 2: Ja, da die Spiegelung eindeutig ist. Und da wir nicht auf einem Blatt Papier arbeiten, sondern einer unendlichen Ebene, ist dies auch immer möglich.

Schritt 3: Ja, denn da sich  $h$  und  $l$  nur in  $P$  schneiden, sind sie nicht identisch. Deshalb kann auch  $g(A_h; A_l)$  nicht identisch zu  $h$  oder  $l$  sein, also existieren eindeutige Schnittpunkte.

Als letztes überprüfen wir noch den 4. Schritt:  
Liefert die Konstruktion tatsächlich das gesuchte Dreieck?

Man bezeichne den Lotfußpunkt von dem Lot auf  $h$  durch  $A$  mit  $F_h$  den Fußpunkt vom Lot auf  $l$  durch  $A$  mit  $A_l$  und  $g(A_h, A_l) \cap g =: \{F_g\}$ .

Um zu zeigen, dass  $g$ ,  $h$  &  $l$  tatsächlich Winkelhalbierende sind, muss gelten:

$$(i) \beta_1 = \beta_2 \quad (ii) \gamma_1 = \gamma_2 \quad (iii) \alpha_1 = \alpha_2$$

Beweis:

$$(i) \beta_1 = \beta_2$$

Man betrachte  $\triangle BA_lF_l$  und  $\triangle BAF_l$ .

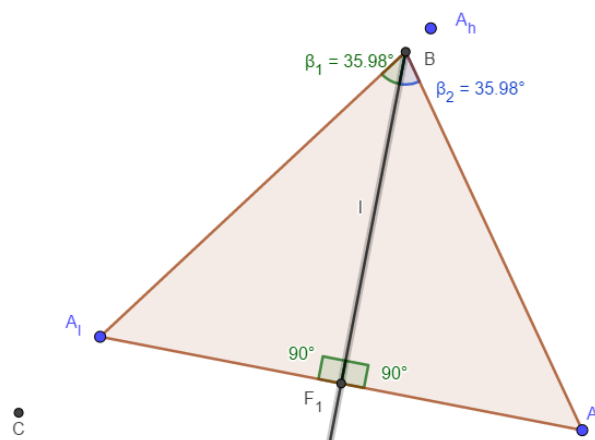
Diese haben folgendes gemeinsam:

- $|\overline{A_lF_l}| = |\overline{AF_l}|$
- $|\angle BF_lA_l| = |\angle BF_lA| = 90^\circ$
- $\overline{BF_l}$  als gemeinsame Seite

Mit dem Kongruenzsatz SWS folgt nun

$$|\triangle BA_lP| \cong |\triangle BAP|$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$



$$(ii) \gamma_1 = \gamma_2$$

Tipp: Suche wie bei (i) 2 geeignete Dreiecke, beweise analog und zeichne eine Skizze!

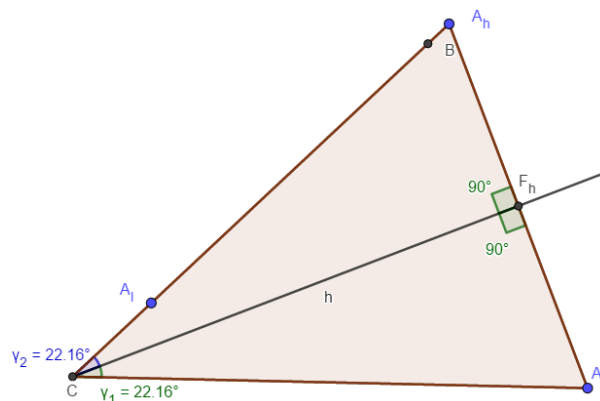
Man betrachte  $\triangle CF_hA_h$  &  $\triangle CAF_h$ .

Diese haben folgendes gemeinsam:

- $|\overline{A_hF_h}| = |\overline{F_hA}|$
- $|\angle CF_hA_h| = |\angle CF_hA| = 90^\circ$
- $\overline{CF_h}$  als gemeinsame Seite

$$\text{SWS} \Rightarrow |\triangle CF_hA_h| \cong |\triangle CAF_h|$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$$



$$(iii) \alpha_1 = \alpha_2$$

Seien  $D$ ,  $E$  und  $F$  Lotfußpunkte der Lote auf  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  bzw.  $\overline{BC}$  durch  $P$ .

Das  $\square ADPE$  können wir über die beiden gegenüberliegenden rechten Winkel und die

gleichlangen Seiten  $\overline{DP}$ ,  $\overline{PE}$ , sowie  $\overline{AC}$  als Diagonale, welche die andere halbiert.

Also ist  $g$  auch die Winkelhalbierende für  $\angle DPE$  und  $\angle EAD = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

