

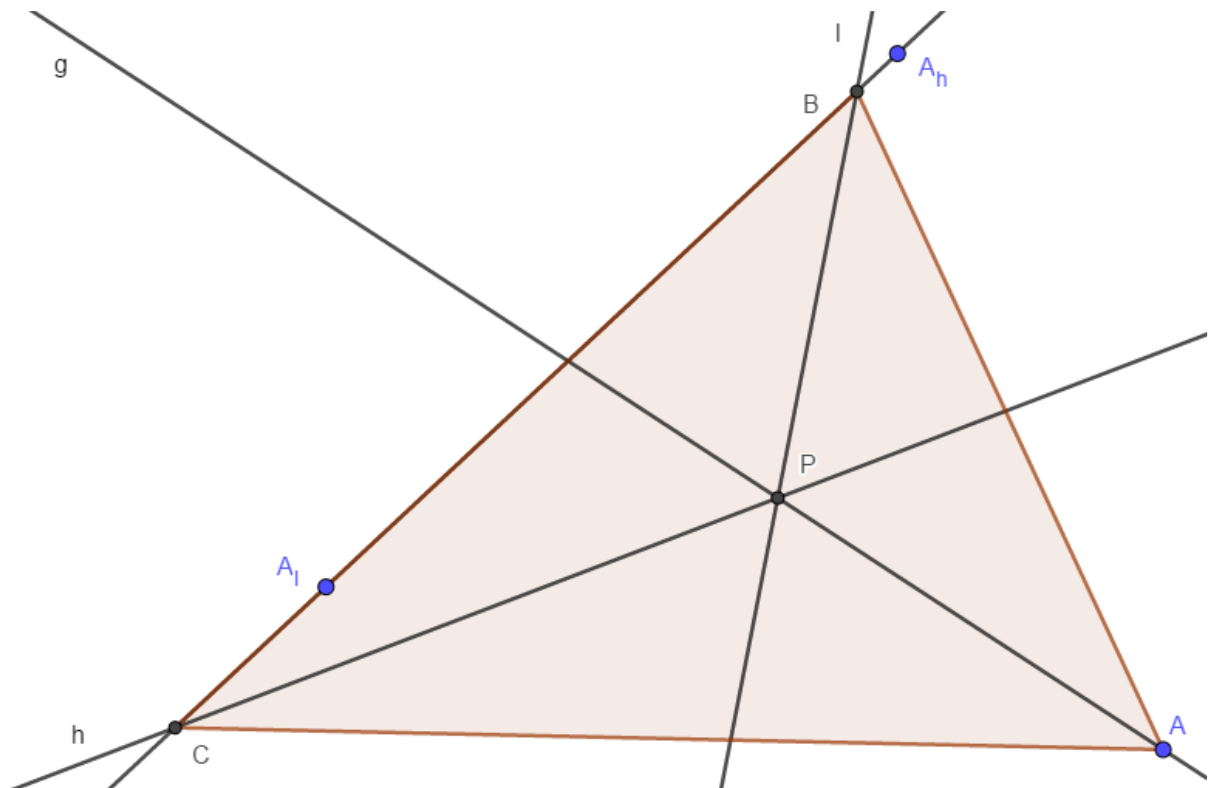
Konstruktion eines Dreiecks um die Winkelhalbierenden

Gegeben seien drei Geraden g, h, l , die sich im Punkt P schneiden.

Gesucht ist ein Dreieck $\triangle ABC$, zu welchem die Geraden g, h, l die Winkelhalbierenden sind.

Dazu schlägt Maximilian die folgende Konstruktion vor:

- Wähle einen Punkt A auf g , der von P verschieden ist.
- Der Spiegelpunkt von A an h sei A_h , der Spiegelpunkt von A an l sei A_l .
- Die Schnittpunkte der Geraden $g(A_h; A_l)$ mit h bzw. l seien B bzw. C .
- $\triangle ABC$ ist das gesuchte Dreieck.



Ist diese Konstruktion eigentlich (immer) durchführbar?
Prüfe dafür jeden Schritt und argumentiere!

Schritt 1: Ja, da die Wahl von A auf g irrelevant ist, weder Entfernung noch Richtung ändern das Ergebnis.

Schritt 2: Ja, da die Spiegelung eindeutig ist. Und da wir nicht auf einem Blatt Papier arbeiten, sondern einer unendlichen Ebene, ist dies auch immer möglich.

Schritt 3: Ja, denn da sich h und l nur in P schneiden, sind sie nicht identisch. Deshalb kann auch $g(A_h; A_l)$ nicht identisch zu h oder l sein, also existieren eindeutige Schnittpunkte.

Als letztes überprüfen wir noch den 4. Schritt:
Liefert die Konstruktion tatsächlich das gesuchte Dreieck?

Man bezeichne den Lotfußpunkt von dem Lot auf h durch A mit F_h den Fußpunkt vom Lot auf l durch A mit A_l und $g(A_h, A_l) \cap g = \{F_g\}$.

Um zu zeigen, dass g , h & l tatsächlich
Winkelhalbierende sind, muss gelten:

$$(i) \beta_1 = \beta_2 \quad (ii) \gamma_1 = \gamma_2 \quad (iii) \alpha_1 = \alpha_2$$

Beweis:

$$(i) \beta_1 = \beta_2$$

Man betrachte $\triangle BA_l F_l$ und $\triangle B A F_l$.

Diese haben folgendes gemeinsam:

- $|\overline{A_l F_l}| = |\overline{A F_l}|$
- $|\angle B F_l A_l| = |\angle B F_l A| = 90^\circ$
- $\overline{B F_l}$ als gemeinsame Seite

Mit dem Kongruenzsatz SWS folgt nun

$$|\triangle BA_l F_l| \cong |\triangle B A F_l|$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

$$(ii) \gamma_1 = \gamma_2$$

Tipp: Suche wie bei (i) 2 geeignete Dreiecke,
beweise analog und zeichne eine Skizze!

Man betrachte $\triangle C F_h A_h$ & $\triangle C A F_h$.

Diese haben folgendes gemeinsam:

- $|\overline{A_h F_h}| = |\overline{F_h A}|$
- $|\angle C F_h A_h| = |\angle C F_h A| = 90^\circ$
- $\overline{C F_h}$ als gemeinsame Seite

$$\text{SWS} \Rightarrow |\triangle C F_h A_h| \cong |\triangle C A F_h|$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$$

$$(iii) \alpha_1 = \alpha_2$$

Seien D , E und F Lotfußpunkte der Lote
auf $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ durch P .

Das $\square ADPE$ können wir über die beiden
gegenüberliegenden rechten Winkel und die
 $\overline{EA}$,

gleichlangen Seiten $\overline{DP}$, $\overline{PE}$, sowie $\overline{AC}$ als
Diagonale, welche die andere halbiert.

Also ist g auch die Winkelhalbierende für
 $\angle DPE$ und $\angle EAD = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

