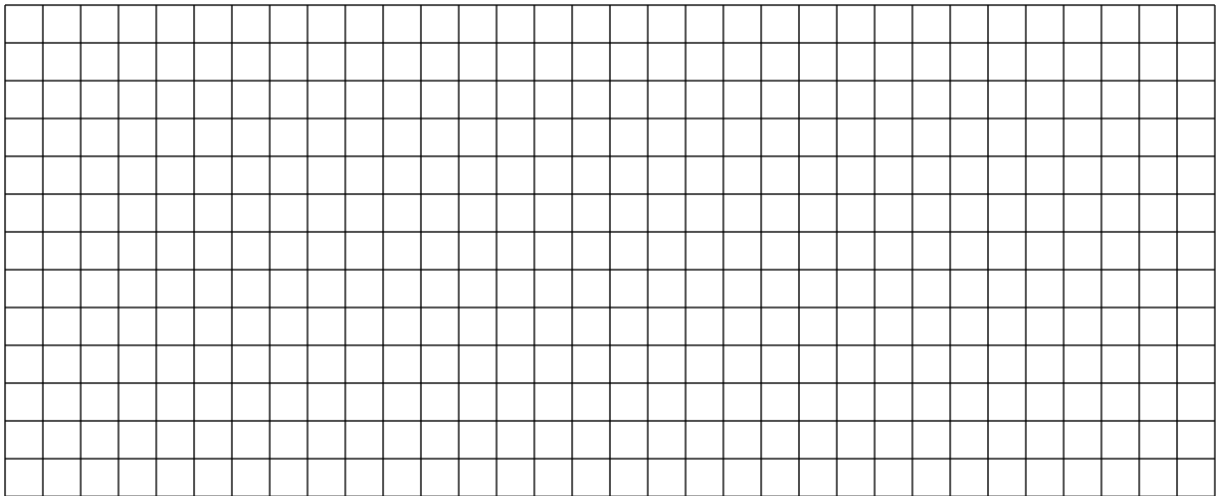


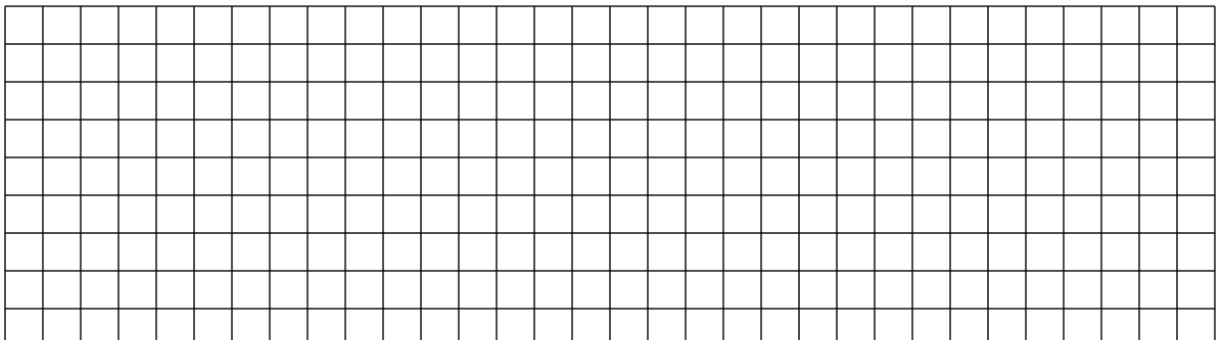
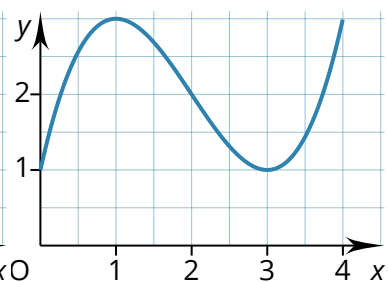
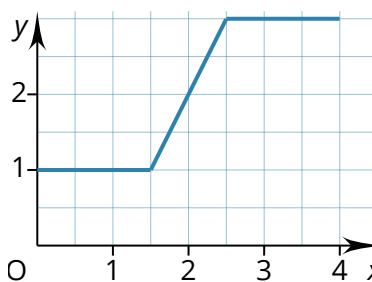
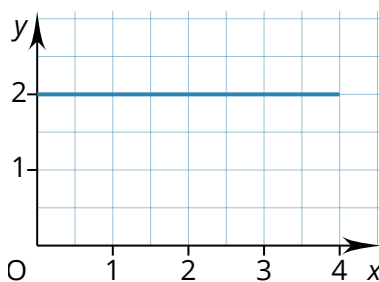
Integralrechnung

1 Einstiegsbeispiele

- ① Ein Auto fährt zwei Stunden mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Danach auf der Autobahn eine Stunde mit 130 km/h und zum Abschluss eine halbe Stunde mit 50 km/h.
- Welche Strecke hat das Auto insgesamt zurückgelegt?
 - Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit war das Fahrzeug unterwegs?
 - Zu Beginn der Fahrt zeigte der Kilometerzähler 33200 km. Welche Zahl zeigt er am Ende der Fahrt?



- ② Die abgebildeten Graphen beschreiben die Geschwindigkeit (in dl/min), mit der zu einem bestimmten Zeitpunkt x (in min) Wasser in einen zu Beginn leeren Eimer fließt.
- In welchem Eimer befindet sich am Ende am meisten Wasser?
 - Wie viel Wasser befindet sich nach 2 min bzw. 4 min jeweils in den Eimern?
- Berechnen Sie oder schätzen Sie möglichst genau!



1 Bestimmte Integrale

Die Funktion f beschreibe die momentane Änderung einer Größe. Ihr Graph sei K_f . Die Gesamtänderung in einem Bereich kann dann mit der Fläche zwischen K_f und der x-Achse in diesem Bereich identifiziert werden. Dabei wird Flächen unterhalb der x-Achse ein negativer Wert zugeordnet, Flächen oberhalb der x-Achse ein positiver; man sagt, der Flächeninhalt ist orientiert.

Solche orientierten Flächeninhalte werden Integrale genannt.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ist die Funktion der momentanen Änderung (stückweise) linear, kann die Gesamtänderung mithilfe der Formeln für Dreiecks- und Rechtecksflächen berechnet werden.

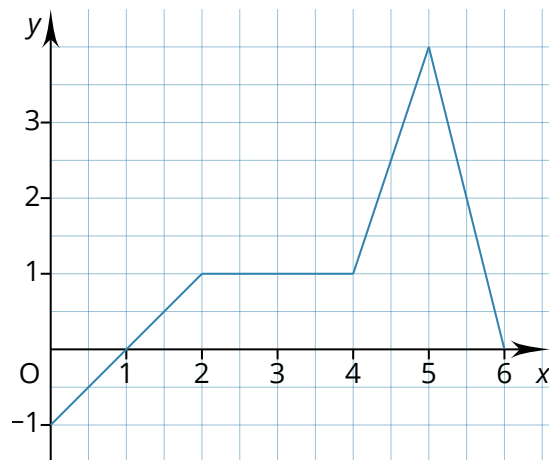
Beispiel: Das nebenstehende Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f .

Es gilt

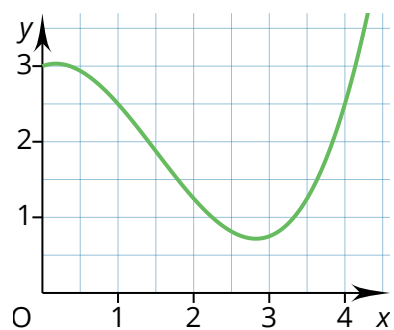
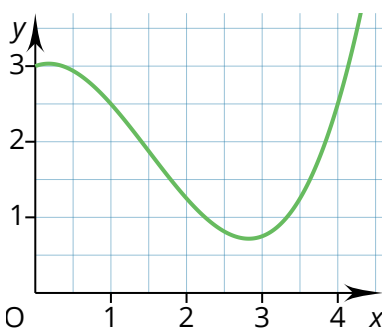
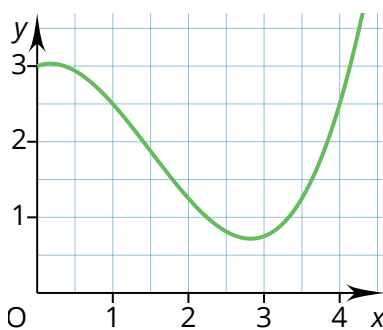
$$\int_0^1 f(x) dx = \quad \int_4^5 f(x) dx =$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \quad \int_0^2 f(x) dx =$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \quad \int_0^6 f(x) dx =$$



Für allgemeine Funktionen kann man sich an das Integral durch Rechtecke annähern.



- ③ Die obigen Schaubilder zeigen den Graphen einer Funktion g .

- Schätzen Sie $\int_0^4 g(x) dx$ mithilfe von Rechtecken der Breite 2, 1 und 0,5 ab.
- Schätzen Sie $\int_0^4 g(x) dx$ ebenso durch das Zählen einzelner Kästchen ab.

3 Stammfunktionen

F heißt Stammfunktion von f , wenn f die Ableitungsfunktion von F ist: $F'(x) = f(x)$
 f beschreibt also die momentane Änderung von F . Da man den Graphen von F in y-Richtung verschieben kann, ohne seine momentane Änderung zu verändern, ist die Stammfunktion nur bis auf einen Summanden $C \in \mathbb{R}$ eindeutig.

Aus den Ableitungsregeln ergeben sich folgende **Regeln für Stammfunktionen**:

Ist f eine Funktion, so gilt für ihre Stammfunktion F :

$f(x) = ax^k$	$F(x) = \frac{a}{k+1}x^{k+1} + C$
$f(x) = ae^{bx}$	$F(x) = \frac{a}{b}e^{bx} + C$
$f(x) = a \cdot \sin(bx)$	$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot \cos(bx) + C$
$f(x) = a \cdot \cos(bx)$	$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin(bx) + C$

Zur Kontrolle die
Stammfunktion
ableiten.

Außerdem gilt:

Ist G eine Stammfunktion von g , so ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$.

④ Bestimmen Sie alle Stammfunktionen.

a) $f(x) = 2x^3$

b) $f(x) = -e^{2x}$

c) $f(x) = 3 \cdot \sin(0,5x) + 4$

4 Berechnung bestimmter Integrale

Stammfunktionen helfen bei der Berechnung von Integralen:

Ist F eine Stammfunktion von f so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$\int_1^3 x^2 + 4 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 + 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3}1^3 + 4 \cdot 1 \right) = 21 - \frac{13}{3} = \frac{50}{3}$$

Aufgabe:

a) $\int_0^2 -x^2 + 2x dx = \left[\right] = - \left(\right) = $

b) $\int_1^3 4x^3 dx = $

c) $\int_0^\pi -\sin(x) dx = $

d) $\int_0^4 e^{0,5x} dx = $