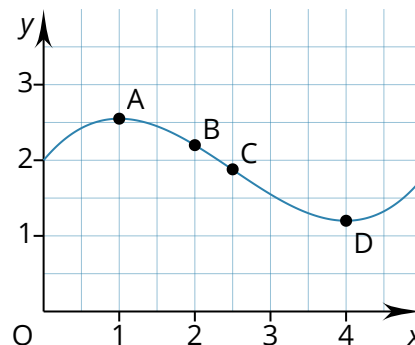


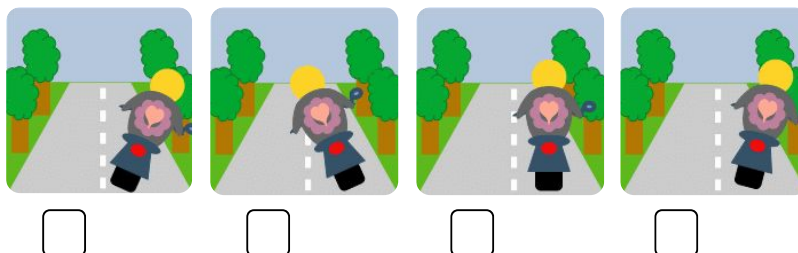
# Krümmung und Wendepunkte

Oma Trude hat von ihren Enkeln einen neuen e-Roller bekommen, um in Zukunft CO<sub>2</sub>-neutral durch den Hühnerstall fahren zu können.

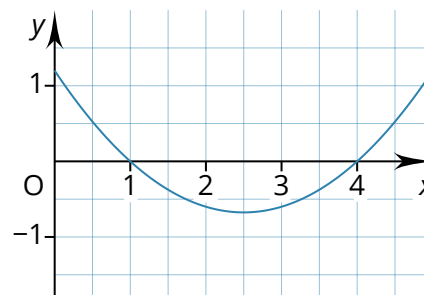
Bei ihrer ersten Ausfahrt (der nebenstehende Graph  $f$  zeigt die gefahrene Strecke aus der Vogelperspektive) fährt ihr Opa Werner in der Diesel-Limousine nach und macht Fotos für die Enkel. Leider bringt er diese durcheinander.



- a) Ordnen Sie die Fotos den Wegpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  zu.



- b) Markieren Sie am Graphen von  $f$  alle Punkte, in denen Oma Trude eine Linkskurve macht, in grün, alle Punkte, in denen sie eine Rechtskurve macht, in rot. Welcher Punkt bleibt übrig?
- c) Markieren Sie am zugehörigen Ableitungsgraphen  $f'$  alle Punkte, in denen dieser steigt, in grün, alle Punkte, in denen dieser fällt, in rot. Welcher Punkt bleibt übrig?
- d) Vergleichen Sie die Markierungen beider Graphen. Was fällt auf?



**Merke** (Ergänzen Sie die genannten Begriffe)

einen Extrempunkt   fällt   negativ   positiv   steigt

Die Lösung mit  
Erklärung gibt's  
unter  
[vimeo.com/497655552](https://vimeo.com/497655552)



Wo der Graph von  $f'$  , macht der Graph von  $f$  eine Linkskurve.

Wo der Graph von  $f'$  , macht der Graph von  $f$  eine Rechtskurve.

Wo der Graph von  $f'$   besitzt, wechselt der Graph von  $f$  die Krümmung.

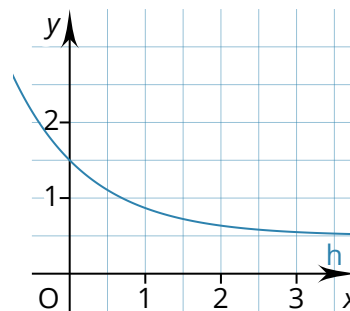
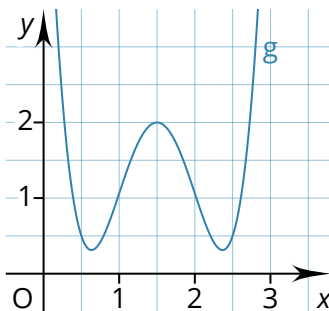
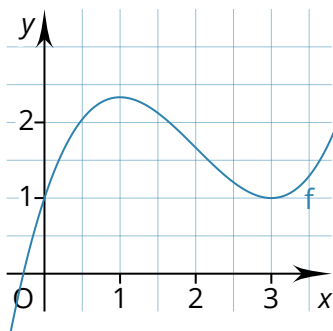
Ein Punkt, in dem der Graph von  $f$  die Krümmung wechselt, heißt **Wendepunkt**.

Für die zweite Ableitung  $f''$  bedeutet das:

Wo  $f''$   ist, macht der Graph von  $f$  eine Linkskurve.

Wo  $f''$   ist, macht der Graph von  $f$  eine Rechtskurve.

- ① Markieren Sie jeweils die Bereiche, in denen der Graph linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt ist, in verschiedenen Farben und geben Sie die **Krümmungsintervalle** an.



**f** ist rechtsgekrümmt für  $x \in ]-\infty; \quad ]$  und linksgekrümmt für  $x \in \quad ] ; \infty[$ .

**g** ist

**h** ist

- ② Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen. Untersuchen Sie die zugehörigen Graphen auf Wendepunkte.

- a)  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + x$   
 b)  $f(x) = -e^x + x$   
 c)  $f(x) = x^4 - x^2$   
 d)  $f(x) = 2 \sin(x) - 1$ , für  $x \in ]0; 2\pi[$

Ein Beispiel für  
die Berechnung  
von Wende-  
punkten finden  
Sie unter  
[vimeo.com/4976](https://vimeo.com/4976)



- ③ Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen. Untersuchen Sie die zugehörigen Graphen auf Wendepunkte.

- a)  $f(x) = x^5 + 2$   
 b)  $f(x) = x^5 - x^4$



#### Wendepunkte mit Hindernissen

Genau wie bei der Extrempunktberechnung kann es passieren, dass auch bei der Wendepunktbestimmung die dritte Ableitung weder positiv noch negativ ist. In diesem Fall müssen Sie die zweite Ableitung an der fraglichen Stelle auf einen Vorzeichenwechsel untersuchen.