

**Aufgabe 3** (Punkte: 5 + 4 + 3)

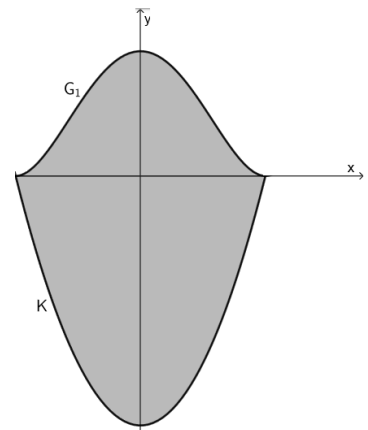
Gegeben sind die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  und die Funktion  $g$  mit  $g(x) = 2x^2 - 2$ . Die Graphen der Schar  $f_a$  sind  $G_a$  und der Graph der Funktion  $g$  ist  $K$ . Alle Graphen  $G_a$  verlaufen achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.  $x$  und  $f(x)$  sind in dm.

a)

Die Graphen  $G_1$  und  $K$  schließen im Intervall  $[-1; 1]$  eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll.

Berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt des Stadtwappens.

Berechnen Sie für das Stadtwappen die Masse in kg, wenn das Wappen aus 6 mm dickem Messing hergestellt wird, das eine Dichte von  $\rho = 8,73 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  besitzt.



b)

Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel  $K$  mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die beiden Schnittpunkte im Intervall  $[-1; 1]$  mit  $G_1$  zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um  $2 \text{ dm}^2$  vergrößern.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung  $p$  mit  $p(x) = cx^2 + d$  der neuen Parabel;  $c, d \in \mathbb{R}; c, d \neq 0$ .

c)

Weisen Sie nach, dass es ein  $a$  gibt, sodass der Graph  $G_a$  mit der x-Achse über dem Intervall  $[-a; a]$  eine Fläche von  $1 \text{ m}^2$  einschließt. Berechnen Sie das gesuchte  $a$  bis auf zwei Nachkommastellen genau.