

Tilgungsrechnung

Was ist Tilgungsrechnung?

Tilgungsrechnung beschreibt, wie ein geliehener Betrag (z. B. ein Kredit) über die Zeit zurückgezahlt wird. Dabei zahlt man nicht nur den geliehenen Betrag (die Tilgung), sondern auch Zinsen als „Gebühr“ für das Ausleihen des Geldes.

Beispiel:

Du nimmst einen Kredit über 10.000 € auf (Anfangsschuld S_0).

Bei 5% Zinsen pro Jahr zahlst du jährlich einen festen Betrag (Annuität A), der sich aus Zins und Tilgung zusammensetzt.

Mit jedem Jahr sinkt die Restschuld, die Zinsen werden weniger, und die Tilgung steigt – bis die Schuld vollständig getilgt ist.

Wie läuft die Rückzahlung ab?

1. Annuität festlegen:

Jährlich wird ein fester Betrag A gezahlt. Dieser setzt sich zusammen aus:

$A = \text{Zinsen} + \text{Tilgung}$

- **Zinsen:** Berechnet auf die noch offene Schuld (Restschuld) des Vorjahres.
- **Tilgung:** Der Teil, der direkt die Schuld reduziert.

2. Jährlicher Ablauf:

- **Jahr 1:** Hohe Zinsen (auf die volle Anfangsschuld), geringe Tilgung.
- **Jahr 2:** Zinsen auf die reduzierte Restschuld, Tilgung steigt leicht.
- ...
- **Letztes Jahr:** Fast keine Zinsen mehr, fast die gesamte Annuität ist Tilgung.

Warum? Weil die **Restschuld jedes Jahr sinkt** - dadurch werden die Zinsen weniger, und die Tilgung nimmt automatisch zu (siehe Tabelle unten).

Wichtige Begriffe

- **Tilgung:** Rückzahlung des geliehenen Kapitals. „Schulden abbauen“.
- **Zinsen:** Kosten für das Ausleihen des Geldes (berechnet als Prozentsatz der Restschuld). Die Zinsen sind fair, wenn sie dem Marktzins entsprechen.
- **Annuität:** Jährliche Gesamtzahlung (Zins + Tilgung). Sie bleibt **immer gleich**, aber das Verhältnis von Zins zu Tilgung ändert sich.
- **Restschuld (RS_t):** Der noch offene Betrag nach t Jahren.

Formeln für nachschüssige Zahlungen

(Zahlung am **Ende** des Jahres)

1. Anfangsschuld:

Die Annuitätentilgung ist aus Sicht der Bank wie eine Rente, da auch hier jedes Jahr ein gleicher Betrag an die Bank bezahlt wird. Daher können wir teilweise auch die Formeln der Rentenrechnung verwenden. Bei Renten berechnen wir den Rentenendwert, indem wir die regelmäßige Zahlung R mit dem Rentenendwert $(q^T - 1)/(q - 1)$ multiplizieren. Um dann den Barwert zu erhalten zinsen wir noch ab, indem wir mit q^{-T} multiplizieren. Gleichermaßen machen wir es auch bei der Tilgungsrechnung. Um die Anfangsschuld zu berechnen, multiplizieren wir die regelmäßige Zahlung A mit dem Rentenendwert $(q^T - 1)/(q - 1)$ und mit q^{-T} um abzuzinsen:

$$S_0 = A * q^{-T} * (q^T - 1)/(q - 1)$$

2. Annuität:

Die Annuität können wir berechnen, indem wir die Formel für die Anfangsschuld nach der Annuität A umstellen. Es ergibt sich:

$$A = S_0 * q^T * (q - 1)/(q^T - 1) \quad (\text{mit } q = 1 + r)$$

Beispiel:

$$S_0 = 10.000 \text{ €}, r = 5 \%, T = 5 \text{ Jahre} \rightarrow A = 2.309,75 \text{ €}$$

3. Restschuld nach t Jahren:

$$RS_t = S_0 * (q^T - q^t)/(q^T - 1)$$

4. Zins im Jahr t (abhängig von der Restschuld des Vorjahres):

$$Z_t = RS_{t-1} * r$$

Wenn wir die Formel für die Restschuld RS einsetzen und r durch $q-1$ ersetzen, erhalten wir:

$$Z_t = S_0 * ((q^T - q^{t-1})/(q^T - 1)) * (q - 1)$$

5. Tilgung im Jahr t (Rest der Annuität nach Zinszahlung):

$$T_t = A - Z_t$$

Setzen wir die Formeln für Annuität A und Zins Z_t ein, erhalten wir:

$$T_t = S_0 * (q^{t-1} * (q - 1)) / (q^T - 1)$$

6. Laufzeit T :

$$T = (\ln(A) - \ln(A - S_0 * r)) / \ln(q)$$

Formeln für vorschüssige Zahlungen

1. Anfangsschuld:

$$S_0 = A * (q^T - 1) / (q^{T-1} * (q - 1))$$

2. Annuität:

Umstellen der Formel für die Anfangsschuld ergibt:

$$A = S_0 * q^{T-1} * (q - 1) / (q^T - 1)$$

Hinweis: Die Annuität ist geringer als bei nachschüssiger Zahlung, da früher getilgt wird.

3. Restschuld:

$$RS_t = S_0 * (q^T - q^{t+1}) / (q^T - 1)$$

Die Schuld sinkt schneller, weil die erste Tilgung sofort zu Jahresbeginn erfolgt.

4. Zins:

$$Z_t = (RS_{t-1} - A) * (q - 1)$$

Auch hier könntest du wieder die Formel für die Restschuld einsetzen.

5. Tilgung:

$$T_t = A - Z_t$$

Setze auch hier ggf. die entsprechenden Formeln ein.

6. Laufzeit:

$$T = \ln(A / (A - S_0 * (q-1)/q)) / \ln(q)$$

Beispiel-Tilgungsplan

$S_0 = 10.000 \text{ €}$, $r = 5 \%$, $T = 5 \text{ Jahre}$

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld (Ende)
1	10.000	500	1810	2.310	7.690
2	8.190	410	1.900	2.310	6.290
3	6.290	315	1.995	2.310	4.295
4	4.295	215	2.095	2.310	2.200
5	2.200	110	2.200	2.310	0

Nachschüssig

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld (Ende)
1	8.190	390	1.810	2.200	8.190
2	6.290	300	1.900	2.200	6.290
3	4.295	205	1.995	2.200	4.295
4	2.200	105	2.095	2.200	2.200
5	0	0	2.200	2.200	0

Vorschüssig

Wie du siehst, sinken von Jahr zu Jahr die Zinsen und die Tilgung steigt, während die Annuität gleich bleibt. Bei vorschüssigen Zahlungen ist die Annuität geringer, da bereits früher getilgt wird und damit zusätzliche Zinsen verhindert werden.

Warum vorschüssige Zahlung günstiger ist

- **Frühere Tilgung:** Da die Zahlung zu Jahresbeginn erfolgt, reduziert sich die Restschuld sofort – die Zinsen im Laufe des Jahres sind geringer.
- **Geringere Annuität** und **schnellere Schuldenreduktion**

Zusammenfassung

- Annuität bleibt gleich, aber der Anteil von Zins und Tilgung ändert sich
- Nachschüssig: Zahlung am Jahresende → höhere Annuität
- Vorschüssig: Zahlung am Jahresanfang → niedrigere Annuität

Hinweis: Bei nicht-ganzzahliger Laufzeit ist eine Sondertilgung nötig (meist im letzten Jahr).

Deine Aufgabe: Versuche selbst einen Tilgungsplan für einen Kredit über 15.000 Euro bei einer Laufzeit von 4 Jahren und einem Zinssatz von 6 % sowohl für vorschüssige als auch für nachschüssige Zahlungen zu erstellen. Sende mir beide Tilgungspläne anschließend zu.